Mémo Raisonnement par Récurrence

Axiome de récurrence :

Si une propriété est vraie pour un entier naturel n_0 et si elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0

Info : *Un **axiome** est une proposition placée au départ d'une théorie sans être déduite d'autres propositions. Il ne se démontre pas.*

Définition :

Une propriété est dite **héréditaire** si on peut prouver que, lorsqu'elle est vraie pour un entier p, elle est vraie aussi pour l'entier p + 1.

Raisonnement par récurrence :

Il se fait en 3 étapes :

① **Montrer que la propriété est vraie pour un rang n_0 :**
↳ *Il s'agira souvent de l'entier $n_0 = 0$ ou de l'entier $n_0 = 1$.*

② **Montrer que la propriété est héréditaire :**
↳ *Prendre pour hypothèse qu'elle est vraie pour l'entier p, avec $p \geq n_0$ et démontrer qu'elle est vraie alors pour l'entier p + 1.*

③ **Conclure à l'aide de l'axiome de récurrence.**
↳ *Pour tout $n \geq n_0$, la propriété est vraie.*

Histoire

C'est à Giuseppe Peano (1858-1932) et à Henri Poincaré (1854-1912) que l'on doit l'axiome de récurrence. Une des traces les plus anciennes de mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence se trouve dans le Traité du triangle arithmétique de Blaise Pascal (1623-1662).

Exemple 1

ENONCE

On considère la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 4$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 \times 2^n - 4$.

Solution

Considérons la propriété : P (n) : $u_n = 7 \times 2^n - 4$

- **Initialisation :** $si\ n = 0\ alors\ 7 \times 2^n - 4 = 7 - 4 = 3 = u_0$. Donc P(0) est vraie
- **Hérédité :** Soit un entier k tel que P (k) soit vraie (Hypothèse de récurrence)
  Alors $u_k = 7 \times 2^k - 4$.
  Démontrons alors que P $(k+1)$ est vraie.
  $u_{k+1} = 2u_k + 4$, par définition
  $= 2(7 \times 2^k - 4) + 4$ par hypothèse de récurrence
  $= 7 \times 2^{k+1} - 8 + 4$
  $= 7 \times 2^{k+1} - 4$ donc P $(k+1)$ est vraie.
  La propriété est héréditaire.
- **Conclusion :**
  D'après le principe de récurrence, on a, pour tout entier naturel n , $u_n = 7 \times 2^n - 4$

Exemple 2

ENONCE – Somme de Gauss

Soit S_n la somme des n premiers entiers naturels non nul : $S_n = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution

Considérons la propriété : « $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- **Initialisation**
  Vérifions que la propriété est vraie pour n = 1.
  $S_1 = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$ donc **la propriété est vraie pour n = 1**.
- **Hérédité**
  Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel k *(nécessairement non nul ici)*.
  Autrement dit $S_k = 1+2+3+\ldots+(k-1)+k = \frac{k(k+1)}{2}$ *(hypothèse de récurrence).*
  Prouvons que la propriété est vraie pour l'entier k+1 :
  $S_{k+1} = 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ *D'après l'hypothèse de récurrence*
  $S_{k+1} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ soit encore $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$
  Donc **la propriété est vraie pour l'entier k+1**
  La propriété est héréditaire
- **Conclusion**
  Pour tout entier $n \geq 1$, la propriété est vraie,
  c'est-à-dire que, **Pour tout** $n \geq 1$, $1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$.